Algèbre linéaire - MATH111(f)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 14: Régression linéaire, théorème spectral et décomposition en valeurs singulières

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) appliquer la **méthode moindres carrées** ;

(O.2) **diagonaliser une matrice symétrique avec une base orthonormée de vecteurs propres** ;

(O.3) **calculer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- erreur d'approximation
- régression linéaire
- décomposition spectrale
- décomposition en valeurs singulières

Noyau d'exercices

1.1 Erreurs d'approximations et régressions linéaires

Pour le noyau : items (a), (i) et (ii) ; et (b), (i).

Exercice 1 (Erreurs d'approximations)
Pour chaque exemple de l'**Exercice** 7 de la **Série d'exercices** 13, calculer l'erreur $\|\mathbf{b}-A\hat{x}\|$ de l'approximation de $\mathbf{b}$ par $A\hat{\mathbf{x}}$, où $\hat{\mathbf{x}}$ est la solution de moindres carrées de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Exercice 2 (Régression linéaire)
Pour chaque ensemble de points

(a) $S_1 = \{(2,1),(5,2),(6,3),(8,3)\}$;

(b) $S_2 = \{(0,0),(1,1),(2,-1),(3,2),(4,0)\}$;

dans le plan, calculer la droite de régression linéaire respective.

1.2 Matrices symétriques et théorème spectral

Exercice 3 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques I)

Rappel de la théorie

On rappelle que **toute matrice symétrique** $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ **est diagonalisable avec des valeurs propres réelles**, et il existe une base orthonormée $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. On note $\lambda_i \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée au vecteur propre $\mathbf{v}_i$ pour $i \in [\![1,n]\!]$. Si l'on pose $Q = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, alors Q est une matrice orthogonale et

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = D, \tag{1}$$

où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser ces matrices avec une matrice orthogonale.

Exercice 4 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques II)

Rappel de la théorie

Suivant la notation de l'exercice précédent, on note que, pour $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symétrique, alors (1) est équivalente à

$$A = QDQ^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

que l'on écrit aussi sous la forme

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

et qui est appelé **décomposition spectrale** de A.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la décomposition spectrale.

1.3 Décomposition en valeurs singulières

Pour le noyau : item (a).

Exercice 5 (Décomposition en valeurs singulières I)
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour le noyau : items (a) et (b).

Exercice 6 (Décomposition en valeurs singulières II)
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour compléter la pratique

2.1 Matrices symétriques

Exercice 7 (Matrices symétriques)
On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique si et seulement si $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{w})$ pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Décomposition en valeurs singulières

Exercice d'examen.

Exercice 8 (Décomposition en valeurs singulières III)
Soit A une matrice, et soient $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

(1) d'abord déduisez le tailles des matrices A, U, Σ et V ;
(2) normalisez les vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ pour obtenir $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, respectivement ;
(3) calculez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$;
(4) calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
(5) complétez $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ avec un base de $\mathbb{R}^4$ et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
(6) définissez V en utilisant $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$;
(7) normalisez $A\mathbf{v}_1$ et $A\mathbf{v}_2$ et utilisez-les pour définir U.

Exercice difficile.

Exercice 9 (Décomposition en valeurs singulières IV)
Calculer une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$